Fach: **Mathematik**
Prüfungsart: **1./2. Prüfungsfach**
Dauer: **5 Stunden**
Hilfsmittel: **Zugelassener Taschenrechner, zugelassene Formelsammlung**

Die Aufgaben umfassen 4 Seiten!

Aufgabe 1

1. Durch die Gleichung $f_{a,b}(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3+x^2+2ax+2(a+b)}{x+1}$ mit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$ ist eine Funktionenschar mit $D_{max}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ gegeben.

1.1 Rechnen Sie nach: $f_{a,b}(x)=\frac{1}{2}x^2+a+\frac{b}{x+1}$.

1.2 Geben Sie eine Gleichung der Asymptotenfunktion zu $f_{a,b}$ an.

1.3 Untersuchen Sie die Lage des Graphen von $f_{a,b}$ bezüglich der Asymptote für $x\to\infty$ und für $x\to-\infty$ in Abhängigkeit von b.

1.4 Erläutern Sie begründet, welche Auswirkung eine Veränderung des Parameters a auf den Graphen von $f_{a,b}$ hat. (Hinweis: Nutzen Sie 1.1.)

1.5 Bestätigen Sie, dass für die 1. Ableitung von $f_{a,b}$ gilt: $f'_{a,b}(x)=x-\frac{b}{(x+1)^2}$.

1.6 Bestimmen Sie b so, dass der Graph von $f_{a,b}$ an der Stelle –2 eine waagrechte Tangente besitzt.

1.7.1 Untersuchen Sie, welche Art von Extremum die Funktion $f_{a,-2}$ an der Stelle –2 hat, und geben Sie die Koordinaten des Extrempunktes an.

1.7.2 Das in 1.7.1 bestimmte Extremum ist das einzige Extremum der Funktion $f_{a,-2}$. Untersuchen Sie nach dieser Vorgabe das Monotonieverhalten der Funktion $f_{a,-2}$.

1.8 Bestimmen Sie a so, dass der Graph von $f_{a,-2}$ durch den Koordinatenursprung verläuft.

Betrachten Sie nun die Funktion $f_{2,-2}$, die im Folgenden mit f bezeichnet wird.

1.9 Notieren Sie die Funktionsgleichung von f und weisen Sie nach, dass f außer 0 keine Nullstellen hat.

1.10 Untersuchen Sie das Verhalten von f an der Definitionslücke.

1.11 Zeichnen Sie mit den bisher gewonnenen Ergebnissen den Graphen von f und den Graphen der zugehörigen Asymptotenfunktion in ein geeignetes Koordinatensystem.

1.12 Untersuchen Sie, ob die im 1. Quadranten liegende Fläche zwischen dem Graphen von f und dem Graphen der Funktion p mit der Gleichung $p(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ ein (endliches) Maß besitzt.

2. Ein zylinderförmiges Glas mit einem Durchmesser von 6 cm enthält Wasser.
Dieses Glas wird so in Rotation versetzt, dass kein Wasser überläuft und das Wasser an der tiefsten Stelle der Wasseroberfläche 2 cm hoch steht.
Der Verlauf der Wasserlinie wird dabei (in einem Längsschnitt durch die Rotationsachse) durch $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ beschrieben (Längeneinheit: 1 cm auf beiden Achsen).

Fertigen Sie eine passende Skizze an und berechnen Sie die im Glas enthaltene Wassermenge.

3. Eine Funktion h sei zweimal differenzierbar und habe die Nullstelle x_0 mit $h'(x_0) \neq 0$.
Betrachten Sie nun die Funktion $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \dfrac{h(x)}{h'(x)}$.

3.1 Zeigen Sie, dass die Funktion g auch die Nullstelle x_0 besitzt.

3.2 Wählen Sie eine Funktion h, die bei -1 eine Nullstelle hat und obige Voraussetzungen erfüllt, und ermitteln Sie das Maß des Schnittwinkels zwischen dem Graphen der zugehörigen Funktion g und der x-Achse.

3.3 Sei h nun eine beliebige Funktion, die obige Voraussetzungen erfüllt. Ermitteln Sie das Maß des Winkels, unter welchem der Graph von g die x-Achse an der Stelle x_0 schneidet.

Aufgabe 2

1. Zwei Passagierflugzeuge F_1 und F_2 fliegen entlang geradliniger Flugbahnen über ein ebenes Gelände hinweg (Längeneinheit: 1km).
Flugzeug F_1 fliegt durch $E(0|2|4)$ in Richtung Westen parallel zum Erdboden.
Die Flugbahn des Flugzeuges F_2 verläuft von $G(0|1|5)$ nach $H(-4|5|4)$.
Das Koordinatensystem ist dabei wie folgt festgelegt:
Die x_1-Achse zeigt nach Osten, die x_2-Achse nach Norden auf der Bodenfläche; die x_3-Achse zeigt senkrecht nach oben.

1.1 Ermitteln Sie Gleichungen für die Flugbahnen der beiden Flugzeuge.

1.2 Begründen Sie, dass sich das Flugzeug F_2 im Sinkflug befindet, und ermitteln Sie, in welche Himmelsrichtung es fliegt.

1.3 Berechnen Sie das Maß des Sinkwinkels von Flugzeug F_2, wobei der Sinkwinkel der Winkel zwischen der Flugrichtung von F_2 und der Horizontalen ist.

1.4 Können die beiden Flugzeuge kollidieren?
Falls nicht, wie nah können sie sich im ungünstigsten Fall kommen?

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkteschar $A_k(k|0|-2k)$, $k\in\mathbb{R}$, sowie die Punkte $B(0|1|2)$ und $C(2|2|0)$ gegeben.

2.1 Bestimmen Sie k so, dass A_k, B und C auf einer Geraden liegen.

2.2 Für $k \neq -2$ bildet jeder Punkt A_k mit den Punkten B und C ein Dreieck.
Zeigen Sie, dass das Dreieck A_kBC einen Flächeninhalt von $\frac{3}{2}|k+2|$ (FE) hat.

2.3 Ermitteln Sie alle $k\in\mathbb{R}$, so dass das Dreieck A_kBC einen Flächeninhalt von 4,5 (FE) besitzt.

2.4. Weisen Sie nach: Die Höhe $\overline{h_a}$ des Dreiecks $A_{-5}BC$ liegt außerhalb des Dreiecks.

Aufgabe 3

1. In einer Firma soll ein Einstellungstest durchgeführt werden. Die Personalchefin, Frau Boss, möchte, dass 9 Bewerber zum Test kommen. Ihrer Erfahrung nach erscheint ein eingeladener Bewerber mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% nicht zum Test. Daher lädt sie 11 Bewerber ein.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 9 Bewerber zum Test erscheinen.

1.2 Frau Boss ist zufrieden. Genau 9 Bewerber sind gekommen: 5 Frauen und 4 Männer.

1.2.1 Die Bewerber passieren den Eingangsbereich nacheinander und tragen sich dabei in eine Liste ein.
Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es, wenn sich an erster und letzter Stelle der Liste ein männlicher Bewerber einträgt?

1.2.2 Um die Teamfähigkeit der Bewerber zu beurteilen, soll ein Ballspiel stattfinden. Dazu bilden die Bewerber zwei gleich große Gruppen. Einer wird Schiedsrichter.
Wie viele verschiedene Mannschaftseinteilungen gibt es?

2. Handys werden auf technische Mängel und auf Beschädigungen am Gehäuse überprüft. Im Mittel haben von 1000 Handys 10 einen technischen Defekt und einen Gehäuseschaden, 970 sind technisch einwandfrei und bei 950 ist das Gehäuse nicht zu beanstanden.
Ein Handy wird zufällig herausgenommen. Es gelte:

R: „Handy ist technisch in Ordnung“

S: „Gehäuse des Handys ist in Ordnung“

Berechnen Sie:

2.1 $P(R \cup S)$

2.2 $P(R \cap S)$

2.3 $P(\overline{R} \cap S)$

2.4 $P(R \mid \overline{S})$

2.5 $P\big((R \cap S) \mid (R \cup S)\big)$

3. Die Kioskbesitzerin Ida weiß aus Erfahrung, dass 30% ihrer Kunden Vollkornbrötchen kaufen, wobei 40% von diesen mit dem Fahrrad kommen. Außerdem weiß sie, das 42% aller Kunden weder Vollkornbrötchen kaufen noch mit dem Fahrrad kommen.

3.1 Überprüfen Sie, ob die folgenden Ereignisse unabhängig sind:

V: „Kunde kauft Vollkornbrötchen“

F: „Kunde kommt mit dem Fahrrad“

3.2 Wie viele hintereinander ankommende Kunden muss man wenigstens beobachten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einen zu finden, der Vollkornbrötchen kauft?

3.3 Stammkunde Adi schlägt Ida ein Spiel vor:
Ida zahlt Adi einen Einsatz von 5 € und erhält genau dann eine Auszahlung, wenn der nächste Kunde ein Vollkornbrötchen kauft. Ist dieser Kunde mit dem Fahrrad gekommen, so wird der Auszahlungsbetrag verdoppelt.
Wie hoch muss die jeweilige Auszahlung an Ida sein, wenn Adi im Mittel 80 Cent gewinnen will?

– –