**Schriftliche Abiturprüfung 2002**



| | |
|---|---|
| **Fach:** | Mathematik |
| **Prüfungsart:** | 3. Prüfungsfach |
| **Dauer:** | 3,5 Stunden |
| **Hilfsmittel:** | zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner |

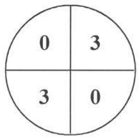
## Aufgabe 3:

Bei einem Vereinsfest bietet der Veranstalter folgendes Glücksspiel an, das aus zwei Schritten besteht.

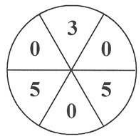
Erster Schritt: Der Spieler dreht das so genannte „Einstiegsrad“, das in die drei Sektoren A, B und C eingeteilt ist.

Zweiter Schritt: Der Spieler dreht das durch den ersten Schritt festgelegte „Glücksrad“ A, B oder C.

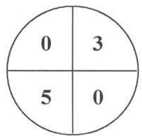
**Glücksrad A**




**Glücksrad B**

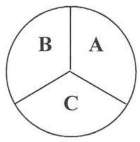



**Glücksrad C**




Der Einsatz beträgt 2,00 Euro pro Spiel. Der Spieler erhält den vom Glücksrad angezeigten Wert in Euro ausgezahlt. Sein Gewinn berechnet sich demnach als Differenz von Auszahlung und Einsatz. Die Zufallsgröße X beschreibe diesen Gewinn.

1. Das **Einstiegsrad** sei in gleiche Sektoren eingeteilt.




1.1. Beschreiben Sie das Spiel durch ein Baumdiagramm, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einem Spiel 3 Euro zu gewinnen.

1.2. Ein Spieler verliert bei einem Spiel seinen Einsatz.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er Glücksrad C gedreht?

1.3. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und berechnen Sie den Erwartungswert E(X).

2. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Spieldurchgang 3 Euro zu gewinnen, beträgt $\frac{7}{36}$.

2.1. Wie oft müsste man spielen, um mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal 3 Euro zu gewinnen.

2.2. Jemand spielt 100 mal. Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyscheff ab, in welchem Intervall mit mindestens 75% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Spiele liegt, bei denen man 3 Euro gewinnt.

**Schriftliche Abiturprüfung 2002**

| | |
|---|---|
| **Fach:** | Mathematik |
| **Prüfungsart:** | 3. Prüfungsfach – Abendgymnasium<br>4. Prüfungsfach – Freie Waldorfschule |
| **Dauer:** | 3,5 Stunden |
| **Hilfsmittel:** | zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner |

**Die Aufgabenstellung umfasst 2 Seiten.**

## Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D_{max} \rightarrow \mathbb{R};\quad x \mapsto a + 3 \cdot \frac{2x-a}{x^2},\quad a \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie alle Funktionen der Schar $f_a$, die an der Stelle $x = 3$ eine waagerechte Tangente haben.

2. Diskutieren Sie die Funktion $f : D_{max} \rightarrow \mathbb{R};\quad x \mapsto \frac{3x^2+6x-9}{x^2}$.

   Zur Kontrolle: $f''(x) = 6 \cdot \frac{2x-9}{x^4}$

3. Im ersten Quadranten schließen das Schaubild von $f$ und die Gerade $y = 3$ eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt.

4. An den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ werden die Tangenten $t_1$ bzw. $t_2$ an den Graph von f gelegt. Zusammen mit der x-Achse begrenzen diese Tangenten eine Dreiecksfläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

## Aufgabe 2:

Gegeben sind die Punkte A(4|3|-1), B(8|5|-1) und S(3|10|-7)

sowie die Geradenschar $h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Welche gegenseitige Lagebeziehung weisen die Geraden der Schar $h_a$ auf?

2. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene e, die die Gerade AB enthält und zu jeder der Geraden $h_a$ parallel liegt.

3. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M von $\overline{AB}$ und zeigen Sie, dass M der Fußpunkt des Lotes von S auf die Ebene e: $-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4 = 0$ ist.

4. Welches Volumen besitzt der Kegel mit Spitze S, dessen Grundkreis in der Ebene e liegt und den Durchmesser $\overline{AB}$ hat?

5. Durch welche Gleichungen wird die Menge aller Punkte, die von e den gleichen Abstand wie der Punkt S haben, beschrieben?

| | |
|---|---|
| **Fach:** | Mathematik |
| **Prüfungsart:** | 3. Prüfungsfach – Abendgymnasium<br>4. Prüfungsfach – Freie Waldorfschule |
| **Dauer:** | 3,5 Stunden |
| **Hilfsmittel:** | zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner |

**Aufgabe 3:**

1. Auf einer Party stellen sich 20 Personen in zufälliger Reihenfolge (Laplaceverteilung) zu einer Polonaise auf. Zur Steigerung der Stimmung tragen 17 Teilnehmer je eine Pappnase gleichen Fabrikats.

1.1. Einer der Teilnehmer ist der Gastgeber. Mit welcher Wahrscheinlichkeit führt er die Polonaise an?

1.2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sich eine Schlange gebildet, bei der die Teilnehmer in alphabetisch geordneter Reihenfolge hintereinander gehen?

1.3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die drei Personen ohne Pappnasen hintereinander marschieren?

1.4. Nach der Polonaise nimmt jeder Teilnehmer sein Glas und stößt mit jedem genau einmal an. Wie oft klingen die Gläser?

2. Statistisch gesehen nehmen die Studienanfänger, die ihre Hochsschulzugangsberechtigung im Saarland erworben haben, zu 48% außerhalb und zu 52% innerhalb des Saarlandes ihr Studium auf.

2.1. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass von 10 Studienanfängern, die ihre Hochschulzugangsberechtigung im Saarland erworben haben,

a) genau zwei das Studium im Saarland beginnen

b) mindestens eine Person das Studium außerhalb des Saarlandes aufnimmt.

2.2. Wie viele der Studienanfänger, die ihre Hochschulzugangsberechtigung im Saarland erworben haben, sind mindestens erforderlich, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 Prozent mindestens einer sein Studium im Saarland beginnt?

**Schriftliche Abiturprüfung 2002**

| | |
|---|---|
| **Fach:** | Mathematik |
| **Prüfungsart:** | 1./2. Prüfungsfach |
| **Dauer:** | 5 Stunden |
| **Hilfsmittel:** | zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner |

**Die Aufgabenstellung umfasst 3 Seiten.**

**Aufgabe 1:**

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D_{max} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{2x}{x^2 + a}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1. Bestimmen Sie die Kurve, auf der alle Extrempunkte der Graphen der Schar $f_a$ liegen.

1.2. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Graphen von $f_a$ und $f_{-a}$ einander senkrecht schneiden.

1.3. Diskutieren Sie die Funktion $f_2 : D_{max} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 2}$.

Zur Kontrolle: $f_2''(x) = \frac{4x^3 - 24x}{(x^2 + 2)^3}$

1.4. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die über dem Intervall $[2\,;+\infty[$ zwischen den Graphen von $f_2$ und $f_{-2}$ liegt.

1.5. An jeder Stelle des Intervalls $[\sqrt{2}\,;+\infty[$ wird die Tangente an den Graph von $f_2$ gelegt. Bestimmen Sie das Intervall, das die y-Achsenabschnitte dieser Tangenten durchlaufen.

2. Gegeben ist die Funktion $g : [0;4] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt{x^3}$.

2.1. Skizzieren Sie den Graph dieser Funktion.

2.2. Die von der x-Achse, der Geraden $x = 4$ und dem Graph von g im ersten Quadranten begrenzte Fläche rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

2.3. Dem vorgenannten Rotationskörper wird ein Zylinder, dessen Achse die x-Achse ist, einbeschrieben.
Welchen Radius und welche Höhe hat der Zylinder mit maximalem Volumen?

**Fach:** Mathematik
**Prüfungsart:** 1./2. Prüfungsfach
**Dauer:** 5 Stunden
**Hilfsmittel:** zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

**Aufgabe 2:**

1. Gegeben sind die Punkte A(2|3|1), B(2|9|4) und C(8|5|2) sowie die Punkteschar $D_r(3\,|\,3+r\,|\,6-2r)$ mit $r \in \mathbb{R}$.

1.1. Stellen Sie eine Normalengleichung der Ebene durch A, B und C auf.

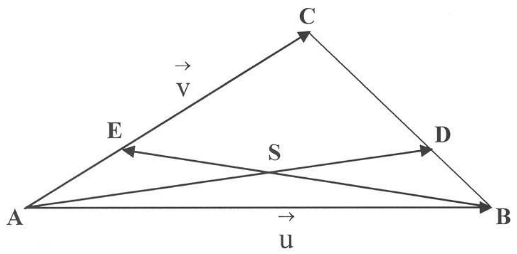
1.2. Zeigen Sie, dass die Punkteschar $D_r$ eine zur Ebene $e_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - 1 = 0$ senkrechte Gerade g bildet.

1.3. Bestimmen Sie dasjenige $s \in \mathbb{R}$, für das $D_s$ ein Punkt der Ebene $e_1$ ist.

1.4. Berechnen Sie in Abhängigkeit von r den Abstand des Punktes $D_r$ von der Ebene $e_1$.

1.5. Untersuchen Sie, ob die Punkte A und B symmetrisch bezüglich der durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und C festgelegten Ebene $e_2$ liegen.

2. In einem beliebigen Dreieck ABC sind zwei Transversalen $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ so eingezeichnet, dass deren Schnittpunkt S die Transversalen im Verhältnis 3:2 teilt.




In welchem Verhältnis teilen die Punkte D und E die Dreiecksseiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$ ?

3. Gegeben ist die Ebenenschar $e_t: x + t \cdot y + 2 \cdot z = 5, \quad t \in \mathbb{R}$.
Alle Ebenen der Schar haben eine feste Gerade h gemeinsam.
Ermitteln Sie deren Gleichung.

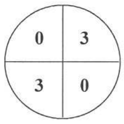
## Aufgabe 3:

Bei einem Vereinsfest bietet der Veranstalter folgendes Glücksspiel an, das aus zwei Schritten besteht.

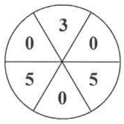
Erster Schritt: Der Spieler dreht das so genannte „Einstiegsrad", das in die drei Sektoren A, B und C eingeteilt ist.

Zweiter Schritt: Der Spieler dreht das durch den ersten Schritt festgelegte „Glücksrad" A, B oder C.

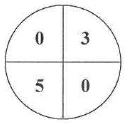
**Glücksrad A**




**Glücksrad B**

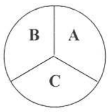



**Glücksrad C**




Der Einsatz beträgt 2,00 Euro pro Spiel. Der Spieler erhält den vom Glücksrad angezeigten Wert in Euro ausgezahlt. Sein Gewinn berechnet sich demnach als Differenz von Auszahlung und Einsatz. Die Zufallsgröße X beschreibe diesen Gewinn.

1. Das **Einstiegsrad** sei in gleiche Sektoren eingeteilt.




1.1. Beschreiben Sie das Spiel durch ein Baumdiagramm, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einem Spiel 3 Euro zu gewinnen.

1.2. Ein Spieler verliert bei einem Spiel seinen Einsatz.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er Glücksrad C gedreht?

1.3. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und berechnen Sie den Erwartungswert E(X).

2. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Spieldurchgang 3 Euro zu gewinnen, beträgt $\frac{7}{36}$.

2.1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler bei 10 Spielen genau zweimal 3 Euro gewinnt.

2.2. Wie oft müsste man spielen, um mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal 3 Euro zu gewinnen.

2.3. Jemand spielt 100 mal. Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyscheff ab, in welchem Intervall mit mindestens 75% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Spiele liegt, bei denen man 3 Euro gewinnt.

3. Das Einstiegsrad wird so umgestaltet, dass das Spiel bei unverändertem Einsatz fair wird, d. h. $E(X) = 0$. Die Wahrscheinlichkeit $p_A$ dafür, dass im zweiten Schritt Glücksrad A gedreht wird, beträgt nunmehr nur noch 0,125.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $p_B$ bzw. $p_C$ dafür, dass im zweiten Schritt Glücksrad B bzw. Glücksrad C zum Zuge kommt.

**Schriftliche Abiturprüfung 2002**
**Fach:** Mathematik
**Prüfungsart:** 3. Prüfungsfach
**Dauer:** 3,5 Stunden
**Hilfsmittel:** zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

**Die Aufgabenstellung umfasst 3 Seiten.**

**Aufgabe 1:**

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D_{max} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{2x}{x^2+a}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Graphen von $f_a$ und $f_{-a}$ einander senkrecht schneiden.

1.2. Diskutieren Sie die Funktion $f_2 : D_{max} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{2x}{x^2+2}$.

Zur Kontrolle: $f_2''(x) = \frac{4x^3 - 24x}{(x^2+2)^3}$

1.3. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die über dem Intervall $[\,2\,;+\infty\,[$ zwischen den Graphen von $f_2$ und $f_{-2}$ liegt.

2. Gegeben ist die Funktion $g : [0;4] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sqrt{x^3}$.

2.1. Skizzieren Sie den Graph dieser Funktion.

2.2. Der von der x-Achse, der Geraden $x = 4$ und dem Graph von g im ersten Quadranten begrenzten Fläche wird ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten einbeschrieben. Welche Länge und welche Breite hat das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt?

| | |
|---|---|
| **Fach:** | Mathematik |
| **Prüfungsart:** | 3. Prüfungsfach |
| **Dauer:** | 3,5 Stunden |
| **Hilfsmittel:** | zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner |

## Aufgabe 2:

1. Gegeben sind die Punkte A(2|3|1), B(2|9|4) und C(8|5|2) sowie die Punkteschar $D_r(3\,|\,3+r\,|\,6-2r)$ mit $r \in \mathbb{R}$.

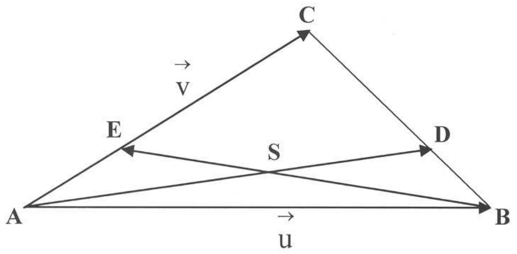
1.1. Stellen Sie eine Normalengleichung der Ebene durch A, B und C auf.

1.2. Zeigen Sie, dass die Punkteschar $D_r$ eine zur Ebene $e_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - 1 = 0$ senkrechte Gerade g bildet.

1.3. Bestimmen Sie dasjenige $s \in \mathbb{R}$, für das $D_s$ ein Punkt der Ebene $e_1$ ist.

1.4. Untersuchen Sie, ob die Punkte A und B symmetrisch bezüglich der durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und C festgelegten Ebene $e_2$ liegen.

2. In einem beliebigen Dreieck ABC sind zwei Transversalen $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ so eingezeichnet, dass deren Schnittpunkt S die Transversalen im Verhältnis 3:2 teilt.




In welchem Verhältnis teilen die Punkte D und E die Dreiecksseiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$ ?