Fach: Mathematik
Prüfungsart: 3. Prüfungsfach
Dauer: 3,5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

---

letzte Seite

Aufgabe 3:

1. Eine Firma stellt Drahtzaun her. Dieser wird in Form von Rollen ausgeliefert. Es ist bekannt, dass 4 % aller Rollen Ausschuss sind. Die Ausschussrollen treten unabhängig voneinander auf.

1.1 Aus der laufenden Produktion werden 20 Rollen Drahtzaun entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Keine der entnommenen Rollen ist Ausschuss.
B: Mindestens 2 aber höchstens 4 Rollen sind Ausschuss.

1.2 Eine Rolle ist Ausschuss, wenn sie mindestens einen der beiden Fehler
F_1 : "Fehler in der Qualität des Drahtes" oder
F_2 : "Fehler im Drahtgeflecht" aufweist. Andere Fehlerarten kommen nicht vor.
Beide Fehler treten unabhängig voneinander auf. Die Wahrscheinlichkeit für Fehler F_1 beträgt 0,025.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Fehler F_2 auftritt.

1.3 Der Verkauf des Drahtes erfolgt zu gleichen Anteilen über die Vertriebszentren Augsburg, Bremen und Chemnitz. 20 % der Lieferungen des Vertriebszentrums Augsburg, 25 % der Lieferungen des Vertriebszentrums Bremen und 10 % des Vertriebszentrums Chemnitz sind unpünktlich.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine zufällig betrachtete Auslieferung unpünktlich ist.
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine unpünktliche Lieferung aus Chemnitz stammt.

1.4 Bei einer Qualitätskontrolle werden 500 Drahtrollen untersucht. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Ausschussrollen und sei binomialverteilt. Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyscheff ab, in welchem Intervall mit mehr als 90 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der unbrauchbaren Drahtrollen liegt ?

Schriftliche Abiturprüfung 2001
Fach : Mathematik
Prüfungsart: 3. Prüfungsfach **Abendgymnasium**
4. Prüfungsfach **Freie Waldorfschule**
Dauer: 3,5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

*** Die Aufgaben umfassen 2 Seiten ***

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a:\ D \to IR\ ;\ x \mapsto (x+a)\cdot e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{mit} \quad a \in IR.$$

Bestimmen Sie die Funktion der Schar, die bei $x = -1$ eine Extremstelle hat.

2. Diskutieren Sie die Funktion

$$f:D \to IR\ ;\ x \mapsto (x+3)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}.$$

3.1 Zeigen Sie: $F(x) = (-2x-10)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ ist die Gleichung einer Stammfunktion von f.

3.2 Der Graph von f und die beiden Koordinatenachsen begrenzen im ersten Quadranten eine ins Unendliche reichende Fläche. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an.

4. Die Wendetangente der Funktion f und die Koordinatenachsen schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie den Inhalt des Dreiecks.

Aufgabe 2

2. Gegeben sind die Punkte A(– 3| 4 | 1), B(1 | 8 | – 1), C(5 | 6 | 3) und die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2.1 Die Ebene e enthält den Punkt A und ist orthogonal zur Geraden g. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene e.

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes M der Geraden g und der Ebene e: $x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 13 = 0$.

2.3 Zeigen Sie, dass M auch der Mittelpunkt der Stecke $\overline{AC}$ ist.

letzte Seite

2.4 Die Strecke $\overline{AC}$ ist die Diagonale eines Quadrats, das in der Ebene e liegt. Zeigen Sie, dass B ein Eckpunkt dieses Quadrats ist.

2.5 Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer senkrechten Pyramide mit dem Rauminhalt 108 Volumeneinheiten. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze S der senkrechten Pyramide (2 Lösungen).

2.6 Berechnen Sie im Dreieck ABS mit $S(\,4\,|-\,1\,|-\,4\,)$ das Maß des Innenwinkels im Punkt S.

Aufgabe 3

1. Der Schüler Knut-Erwin ist stolzer Besitzer eines älteren Kleinbusses, dessen Motor leider bei jedem Halt mit 40%iger Wahrscheinlichkeit ausgeht.

1.1 Auf dem Weg zur Schule kommt Knut-Erwin an 12 Ampeln vorbei, die im ungünstigsten Fall, den wir im Folgenden annehmen wollen, alle auf Rot stehen, d. h. ihn zum Anhalten zwingen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Motor auf dem Weg zur Schule
(a) an jeder Ampel neu gestartet werden muss;
(b) an genau der Hälfte der roten Ampeln durchhält?

1.2 Wie viele rote Ampeln müsste die Strecke wenigstens haben, damit der Motor mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal ausginge?

2. Der Kleinbus hat einschließlich Fahrersitz 8 Plätze (Fahrer- und Beifahrersitz, dahinter zwei Reihen mit je drei Plätzen).

2.1 Auf wie viele verschiedene Arten können 8 Personen die Sitzplätze des Busses besetzen?

2.2 Die Pausen verbringt Knut-Erwin mit 3 Mitschülerinnen und 4 Mitschülern in seinem Bus. Da sie das Auto lediglich als Aufenthaltsraum nutzen, besetzen sie die Plätze zufällig.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit
(a) befindet sich Knut-Erwin hinter dem Steuer?
(b) befindet sich Knut-Erwin in der letzen Reihe?
(c) sitzen die 3 Schülerinnen in der letzten Reihe?

Schriftliche Abiturprüfung 2001

Fach: Mathematik
Prüfungsart: 1./2. Prüfungsfach
Dauer: 5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!

Aufgabe 1:

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}, x \mapsto a \cdot (ax+1) \cdot e^{-ax}$ $, a \in \mathrm{IR}^+$.

1.1 Zeigen Sie, dass für den Funktionsterm der 2. Ableitung gilt:
$f_a''(x) = a^3 \cdot (ax-1) \cdot e^{-ax}$.

1.2 Bestimmen Sie a so, dass die Funktion an der Stelle 1 einen Wendepunkt besitzt.

1.3 Diskutieren Sie die Funktion $f: \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$
$x \mapsto (x+1) \cdot e^{-x}$.

1.4 Der Graph von f schließt mit der x - Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an.

1.5 Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen.

1.6 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangenten t von f_a . Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

(Zur Kontrolle: t : $y = \frac{-a^2}{e} x + \frac{3a}{e}$)

1.7 Der Schnittpunkt N_a von f_a mit der x - Achse, der Wendepunkt W_a und der Schnittpunkt S_a der Wendetangenten mit der x - Achse bilden ein Dreieck.

1.7.1 Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

1.7.2 Bestimmen Sie a so, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

2. Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:
$f'(x) = f(x) \cdot (\frac{1}{x+1} - 1)$ und $f(0) = 1$.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

3. Die beiden Koordinatenachsen, die Parallelen zu diesen Achsen durch den Punkt P(3 | 8) und die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{16}{3} - x^2$ schließen im 1.Quadranten eine Fläche ein. In diese Fläche wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass P(3 | 8) ein Eckpunkt ist und ein weiterer Eckpunkt Q(x | y) auf der Parabel liegt. Die Rechteckseiten verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen.
Wie sind die Koordinaten von Q zu wählen, wenn der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß werden soll ?

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Ebene $e: 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 15 = 0$

und die Geradenschar $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, t \in \mathbb{R}$

1.1 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar g_t liegen.

1.2 Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden sowie den Schnittwinkel der Ebene e und der Ebene $e^*: x_2 - 2x_3 + 5 = 0$.

1.3 Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Ebene e und den Geraden der Schar g_t in Abhängigkeit von t.

1.4 Eine Gerade der Schar g_t schneidet die Ebene e in $S(4 \mid y \mid z)$. Bestimmen Sie t und die Koordinaten y und z des Punktes S.

1.5 Berechnen Sie alle Punkte der Geraden g_1 $(t = 1)$, die von e den Abstand 2 haben.

2. Gegeben sind die Punkte $A(-4 \mid 4 \mid 2)$, $B(1 \mid -1 \mid 0)$ und $C(5 \mid 1 \mid 2)$.
Durch die Punkte A und C verläuft die Gerade g. Spiegelt man den Punkt B an der Geraden g, so erhält man den Punkt D.

2.1 Bestimmen Sie den Spiegelpunkt D.

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

---

letzte Seite

Aufgabe 3

1. Eine Firma stellt Drahtzaun her. Dieser wird in Form von Rollen ausgeliefert. Es ist bekannt, dass 4 % aller Rollen Ausschuss sind. Die Ausschussrollen treten unabhängig voneinander auf.

1.1 Aus der laufenden Produktion werden 20 Rollen Drahtzaun entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: Keine der entnommenen Rollen ist Ausschuss.
B: Mindestens 2 aber höchstens 4 Rollen sind Ausschuss.

1.2. Eine Rolle ist Ausschuss, wenn sie mindestens einen der beiden Fehler
F_1 : "Fehler in der Qualität des Drahtes" oder
F_2 : "Fehler im Drahtgeflecht" aufweist. Andere Fehlerarten kommen nicht vor. Beide Fehler treten unabhängig voneinander auf. Die Wahrscheinlichkeit für Fehler F_1 beträgt 0,025.

1.2.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Fehler F_2 auftritt.

1.2.2 Wie viele Drahtrollen muss man untersuchen, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % der Fehler F_1 mindestens einmal auftritt ?

1.3 Der Verkauf des Drahtes erfolgt zu gleichen Anteilen über die Vertriebszentren Augsburg, Bremen und Chemnitz. 20 % der Lieferungen des Vertriebszentrums Augsburg, 25 % der Lieferungen des Vertriebszentrums Bremen und 10 % des Vertriebszentrums Chemnitz sind unpünktlich.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine zufällig betrachtete Auslieferung unpünktlich ist.
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine unpünktliche Lieferung aus Chemnitz stammt.

1.4 Bei einer Qualitätskontrolle werden 500 Drahtrollen untersucht. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Ausschussrollen und sei binomialverteilt. Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyscheff ab, in welchem Intervall mit mehr als 90 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der unbrauchbaren Drahtrollen liegt ?

2. Bei der Produktion von Drähten wird die Drahtstärke durch die Zufallsgröße Y beschrieben. Dabei stellt man folgende Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Drahtstärken (in mm) fest:

Stärke in mm	2,7	2,8	2,9	3	3,1	3,2
p	0,02	0,16	0,22	0,52	0,07	0,01

Berechnen Sie den Erwartungswert sowie die Streuung von Y.

Schriftliche Abiturprüfung 2001
Fach: Mathematik
Prüfungsart: 3. Prüfungsfach
Dauer: 3,5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!

Aufgabe 1:

1. Gegeben ist die Funktionenschar
$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a \cdot (ax+1) \cdot e^{-ax} \qquad , a \in \mathbb{R}^+.$

1.1 Zeigen Sie, dass für den Funktionsterm der 2. Ableitung gilt:
$f_a''(x) = a^3 \cdot (ax-1) \cdot e^{-ax}$.

1.2 Bestimmen Sie a so, dass die Funktion an der Stelle 1 einen Wendepunkt besitzt.

1.3 Diskutieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (x+1) \cdot e^{-x}$

1.4 Der Graph von f schließt mit der x - Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an.

1.5 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangenten t von f_a. Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
(Zur Kontrolle: t : $y = \frac{-a^2}{e} \cdot x + \frac{3a}{e}$)

2. Die beiden Koordinatenachsen, die Parallelen zu diesen Achsen durch den Punkt P(3 | 8) und die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{16}{3} - x^2$ schließen im 1.Quadranten eine Fläche ein. In diese Fläche wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass P(3 | 8) ein Eckpunkt ist und ein weiterer Eckpunkt Q(x | y) auf der Parabel liegt. Die Rechteckseiten verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen.
Wie sind die Koordinaten von Q zu wählen, wenn der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß werden soll ?

Fach: Mathematik
Prüfungsart: 3. Prüfungsfach
Dauer: 3,5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Ebene $e: 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 15 = 0$

und die Geradenschar g_t: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, t \in \mathbb{R}$

1.1 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar g_t liegen.

1.2 Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden sowie den Schnittwinkel der Ebene e und der Ebene e^*: $x_2 - 2x_3 + 5 = 0$.

1.3 Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Ebene e und den Geraden der Schar g_t in Abhängigkeit von t.

2. Gegeben sind die Punkte $A(-4 \mid 4 \mid 2)$, $B(1 \mid -1 \mid 0)$ und $C(5 \mid 1 \mid 2)$.
Durch die Punkte A und C verläuft die Gerade g. Spiegelt man den Punkt B an der Geraden g, so erhält man den Punkt D.

2.1 Bestimmen Sie den Spiegelpunkt D.

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.