Aufgabe 3 :

1. Gegeben sei ein Alphabet mit 5 Vokalen und 21 Konsonanten. Es wird eine zufällige Buchstabenfolge aus 5 Buchstaben gebildet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A : Die Buchstabenfolge besteht aus lauter verschiedenen Buchstaben.

B : Die Buchstabenfolge enthält mindestens einen Vokal.

$C = A \cap \overline{B}$

D : Die Buchstabenfolge beginnt mit einem Vokal gefolgt von 4 verschiedenen Konsonanten.

2. Eine Fabrik produziert Fliesen. Dabei ist jede Fliese mit der Wahrscheinlichkeit 0,96 fehlerfrei. Die Fliesen werden in Kartons zu je 25 Stück verpackt.

2.1 Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl X der fehlerhaften Fliesen in einem Karton. (Zur Kontrolle: $E(X) = 1$)

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der fehlerhaften Fliesen um höchstens 1 vom Erwartungswert abweicht.

2.3 Ein Händler bezieht von der Fabrik 15 Kartons dieser Fliesen. Zur Kontrolle entnimmt er jedem Karton zufällig 2 Fliesen. Er nimmt den Karton nur dann an, wenn keine der überprüften Fliesen zu beanstanden ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür,

2.3.1 dass ein bestimmter Karton angenommen wird (Zur Kontrolle: $p = 0{,}9216$),

2.3.2 dass höchstens 1 Karton zurückgewiesen wird.

Fach : Mathematik

Prüfungsart : 3. Prüfungsfach – **Abendgymnasium**

4. Prüfungsfach – **Freie Waldorfschule**

Dauer : 3.5 Stunden

Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten. !!!

Aufgabe 1 :

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D_{max} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x+2+\frac{a}{x}\ ,\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

1. Bestimmen Sie a so, dass f_a an der Stelle 1 eine Nullstelle besitzt.
2. Untersuchen Sie, wie die Anzahl der Nullstellen von f_a von a abhängt.
3. Diskutieren Sie die Funktion $f : D_{max} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x + 2 - \frac{3}{x}$.

   (Zur Kontrolle : $f''(x) = -\frac{6}{x^3}$)

4. Betrachtet wird die Fläche zwischen dem Graphen von f (aus Teil 1.3) und der Asymptote über dem Intervall [1 ; k]. Wie muss die rechte Grenze k des Intervalls [1 ; k] gewählt werden, damit der Inhalt dieser Fläche die Maßzahl 6 hat?

5.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Normale an der Stelle 1 des Graphen von f.

(Zur Kontrolle : $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$)

5.2 Die Normale schneidet den Funktionsgraphen von f ein zweites Mal. Berechnen Sie diese zweite Schnittstelle und den zugehörigen Schnittwinkel.

Fach : Mathematik

Prüfungsart : 3. Prüfungsfach – **Abendgymnasium**

4. Prüfungsfach – **Freie Waldorfschule**

Dauer : 3.5 Stunden

Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

Aufgabe 2 :

1. Gegeben sind die Punkte A(4 | 0 | 2) , B(2 | 4 | 0) und C(0 | 2 | 4).

1.1 Bestimmen Sie in Parameterform und allgemeiner Normalenform eine Gleichung der Ebene, welche die Punkte A, B und C enthält.

1.2 Bestimmen Sie den Abstand der Ebene e: $x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$ vom Koordinatenursprung.

1.3 Betrachten Sie das Dreieck ABC. Die Gerade s_1 verläuft durch den Punkt C und den Mittelpunkt von $\overline{AB}$, die Gerade s_2 durch den Punkt A und den Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden s_1 und s_2.

(Zur Kontrolle: S (2 | 2 | 2))

1.4 Errichten Sie die Lotgerade auf der Dreiecksebene im Punkt S. Diese Lotgerade durchstößt die x_1–x_2–Ebene im Punkt D.
Berechnen Sie die Koordinaten von D. [Zur Kontrolle : D(0 | 0 | 0)]

1.5 Spiegeln Sie den Koordinatenursprung an der Ebene e (aus Teil 1.2).

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Prüfen Sie, ob sich der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen lässt.

Fach : Mathematik letzte Seite

Prüfungsart : 3. Prüfungsfach – **Abendgymnasium**

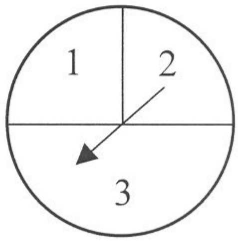
4. Prüfungsfach – **Freie Waldorfschule**

Dauer : 3.5 Stunden

Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

Aufgabe 3 :

1. Ein Glücksrad ist wie in der Abbildung rechts in drei Felder aufgeteilt, die jeweils durch die Ziffern 1, 2 und 3 gekennzeichnet sind.



Nach dem Drehen des Rades zeigt der Pfeil nach Stillstand immer genau ein Feld an. Die Ziffern 1 und 2 erscheinen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

Ein Spieler dreht das Glücksrad zweimal hintereinander.

1.1 Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge sowie die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse an.

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A : „ Die Ziffer 3 erscheint spätestens beim zweiten Mal. “

B : „ Die Ziffer 2 erscheint genau einmal. “

C : „ Die Ziffer 1 erscheint höchstens einmal. “

$D = A \cap B$

2. „Die Angst des Torwarts beim Elfmeter“ – so lautet der Titel eines Buches von Peter Handke. Diese Angst scheint begründet, denn nach statistischer Auswertung der Bundesliga-Ergebnisse zeigte sich, dass nur 7,8 % aller Elfmeter vom Torwart gehalten werden.

2.1 Beim Elfmeterschießen im Pokalfinale werden nacheinander 5 Elfmeter geschossen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Torwart

a) genau einen Elfmeter hält,

b) alle Elfmeter hält.

2.2 Wie viele Elfmeter müssten geschossen werden, damit der Torwart mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50% mindestens einen Elfmeter hält?

Fach : Mathematik

Prüfungsart : 1. / 2. Prüfungsfach

Dauer : 5 Stunden

Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten. !!!

Aufgabe 1 :

1. Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a : D_{\max} \to \mathbb{R} \;;\; x \mapsto \frac{1}{1 - a \cdot \ln(x)} \;,\quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \;.$$

1.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

1.2 Bestimmen Sie die Funktion der Schar f_a, die ihre Definitionslücke an der Stelle e besitzt.

1.3 Diskutieren Sie die Funktion $f\colon D_{\max} \to \mathbb{R} \;;\; x \mapsto \dfrac{1}{1 - \ln(x)}$.

Untersuchen Sie dabei zusätzlich auch $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.

(Zur Kontrolle : $f''(x) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x^2(1 - \ln(x))^3}$)

1.4 Zeigen Sie, dass die Graphen der Schar f_a genau einen gemeinsamen Punkt besitzen.

1.5 Vom Ursprung aus wird an jeden Graphen der Schar f_a die Tangente gelegt. Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve, auf der die Berührpunkte liegen.

2. Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;;\; x \mapsto 4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2.1 Untersuchen Sie die Funktion g auf Nullstellen, Extrema und Symmetrie und berechnen Sie die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$. Skizzieren Sie den Graphen von g.

2.2 Begründen Sie, dass die Funktion $g_1 : \mathbb{R}_0^+ \to W \;;\; x \mapsto 4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ umkehrbar ist. Geben Sie die Wertemenge W an und berechnen Sie die Umkehrfunktion.

2.3 Der Graph der Funktion g, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der bei Rotation dieser Fläche um die y-Achse entsteht.

2.4 Sei $u \in \mathbb{R}^+$. Die Koordinatenachsen, die Geraden $x = u$ und $y = g(u)$ begrenzen ein Rechteck. Berechnen Sie u so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird.

2.5 Gegeben ist die Funktion $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;;\; x \mapsto 4 \int\limits_1^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

Zeigen Sie, dass I **genau eine** Nullstelle besitzt. Geben Sie diese Nullstelle an.

Fach : Mathematik

Prüfungsart : 1. / 2. Prüfungsfach

Dauer : 5 Stunden

Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

Aufgabe 2 :

1. Gegeben sind die Punkte A(–2 | 0 | 5) , B(–6| 2 | 11) , C(6 |–6 | 3) und D(–5 |–4 | 4) ,

die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$,

sowie die Geradenschar h_t: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2t \\ -3t+1 \\ t-2 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

1.1 Berechnen Sie das Maß des Schnittwinkels zwischen der Geraden g_{AB} durch A und B und der Geraden g_{AC} durch A und C.

1.2 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar h_t liegen.

1.3 Berechnen Sie den Spiegelpunkt des Punktes D an der Ebene $e: 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12 = 0$.

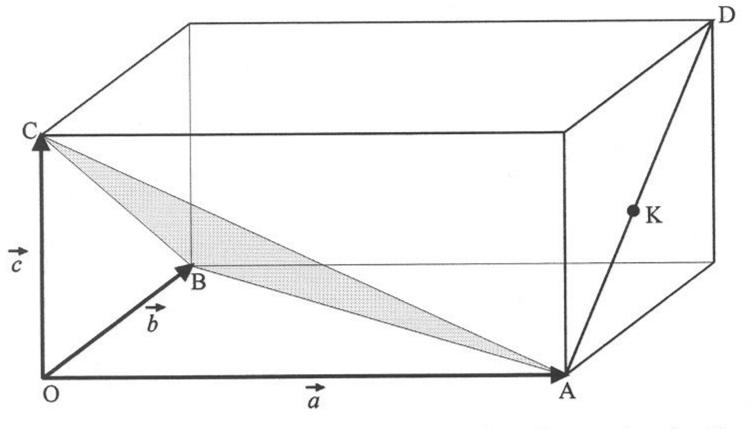
1.4 Untersuchen Sie, ob die Gerade g parallel zu einer Geraden h_t der Schar verläuft und ob g und eine Gerade h_t der Schar gleich sind.

1.5.1 Zeigen Sie: F(2 | –2 | –1) ist der Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade g.

1.5.2 Berechnen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden g.

1.5.3 Bestimmen Sie eine Punktrichtungsgleichung der Ebene e_1, welche die Gerade g enthält und einen möglichst großen Abstand von C hat.

2. Ein Quader wird von den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ vom Ursprung O aus aufgespannt. Der Punkt K teilt die Diagonale $\overline{AD}$ im Verhältnis 2 : 3.



2.1 In welchem Punkt S durchstößt die Gerade OK die Ebene durch die Punkte A, B, C? Geben Sie den Ortsvektor dieses Punktes S an.

2.2 Begründen Sie, dass der Punkt S innerhalb des Dreiecks ABC liegt.

Prüfungsart : 1. / 2. Prüfungsfach

Dauer : 5 Stunden

Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

Aufgabe 3 :

1. Gegeben sei ein Alphabet mit 5 Vokalen und 21 Konsonanten. Es wird eine zufällige Buchstabenfolge aus 5 Buchstaben gebildet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A : Die Buchstabenfolge besteht aus lauter verschiedenen Buchstaben.

B : Die Buchstabenfolge enthält mindestens einen Vokal.

$C = A \cap \overline{B}$

D : Die Buchstabenfolge enthält zweimal denselben Vokal und drei verschiedene Konsonanten.

2. Eine Fabrik produziert Fliesen. Dabei ist jede Fliese mit der Wahrscheinlichkeit 0,96 fehlerfrei. Die Fliesen werden in Kartons zu je 25 Stück verpackt.

2.1 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Streuung für die Anzahl X der fehlerhaften Fliesen in einem Karton. (Zur Kontrolle: $E(X) = 1$)

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der fehlerhaften Fliesen um höchstens 1 vom Erwartungswert abweicht.

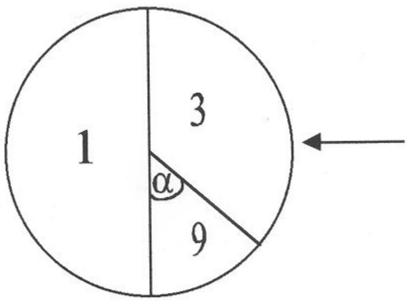
2.3 Ein Händler bezieht von der Fabrik 15 Kartons dieser Fliesen. Zur Kontrolle entnimmt er jedem Karton zufällig 2 Fliesen. Er nimmt den Karton nur dann an, wenn keine der überprüften Fliesen zu beanstanden ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür,

2.3.1 dass ein bestimmter Karton angenommen wird (Zur Kontrolle: $p = 0{,}9216$),

2.3.2 dass höchstens 1 Karton zurückgewiesen wird.

3. Ein Glücksrad (vgl. Abbildung rechts) ist in eine feste Gewinnhälfte zu 1 DM und zwei Gewinnsektoren zu 3 DM und 9 DM eingeteilt, deren Flächeninhalte durch Einstellen des Winkels α nach Bedarf verändert werden können.

Der Pfeil zeigt nach dem Drehen des Rades, also nach einem Spiel, eindeutig den auszuzahlenden Geldbetrag an und legt dadurch die Zufallsgröße G fest.



Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von G in Abhängigkeit von α und berechnen Sie α so, dass der Glücksradbesitzer bei einem Einsatz von 3 DM pro Spiel im Mittel 10% des Einsatzes als Gewinn erzielt.

Fach : Mathematik

Prüfungsart : 3. Prüfungsfach

Dauer : 3,5 Stunden

Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

---

!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten. !!!

Aufgabe 1 :

1. Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a : D_{\max} \rightarrow \mathbb{R} \;;\; x \mapsto \frac{1}{1 - a \cdot \ln(x)} \quad , \; a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \; .$$

1.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

1.2 Bestimmen Sie die Funktion der Schar f_a, die ihre Definitionslücke an der Stelle e besitzt.

1.3 Diskutieren Sie die Funktion $f : D_{\max} \rightarrow \mathbb{R} \;;\; x \mapsto \dfrac{1}{1 - \ln(x)}$.

Untersuchen Sie dabei zusätzlich auch $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.

(Zur Kontrolle : $f''(x) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x^2(1 - \ln(x))^3}$)

2. Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \;;\; x \mapsto 4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2.1 Untersuchen Sie die Funktion g auf Nullstellen, Extrema und Symmetrie und berechnen Sie die Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$. Skizzieren Sie den Graphen von g.

2.2 Der Graph der Funktion g, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der bei Rotation dieser Fläche um die y-Achse entsteht.

2.3 Gegeben ist die Funktion $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \;;\; x \mapsto 4 \int\limits_1^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Zeigen Sie, dass I **genau eine** Nullstelle besitzt. Geben Sie diese Nullstelle an.

Fach : Mathematik

Prüfungsart : 3. Prüfungsfach

Dauer : 3,5 Stunden

Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

Aufgabe 2 :

1. Gegeben sind die Punkte A(–2 | 0 | 5) , B(–6| 2 | 11) , C(6 |–6 | 3) und D(–5 |–4 | 4) ,

die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$,

sowie die Geradenschar h_t: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2t \\ -3t+1 \\ t-2 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

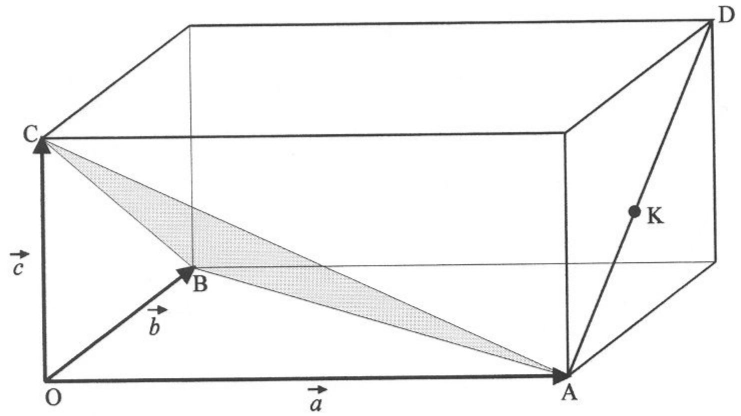
1.1 Berechnen Sie das Maß des Schnittwinkels zwischen der Geraden g_{AB} durch A und B und der Geraden g_{AC} durch A und C.

1.2 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar h_t liegen.

1.3 Berechnen Sie den Spiegelpunkt des Punktes D an der Ebene $e: 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12 = 0$.

1.4 Untersuchen Sie, ob die Gerade g parallel zu einer Geraden h_t der Schar verläuft.

2. Ein Quader wird von den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ vom Ursprung O aus aufgespannt. Der Punkt K teilt die Diagonale $\overline{AD}$ im Verhältnis 2 : 3.



2.1 In welchem Punkt S durchstößt die Gerade OK die Ebene durch die Punkte A, B, C? Geben Sie den Ortsvektor dieses Punktes S an.

2.2 Begründen Sie, dass der Punkt S innerhalb des Dreiecks ABC liegt.